数　学

数と式 1　次の計算をしなさい。ただし，(5) は問に答えよ。

(1)　$(-6)^2 \div 4-7$

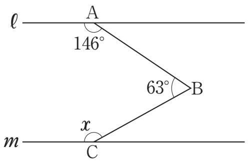
(2)　$(a^2b)^2 \times ab^2 \div (ab)^3$

(3)　$\sqrt{8}+3\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$

(4)　$\dfrac{3a-2b}{2}-\dfrac{2a-3b}{3}$

(5)　関数$y=ax^2$のグラフが２点$\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{9}{16}\right)$，$(-4,\ b)$を通るという。このとき，$a$，$b$の値を求めよ。

2　次の各問に答えよ。



平面図形 (1)　右の図で，直線ℓと直線mは平行である。

$\angle x$の大きさを求めよ。

確率 (2)　Ａの袋には，１，２，３，４の数字が１つずつ書かれた４枚のカードが，Ｂの袋には，１，２，３，４，５の数字が１つずつ書かれた５枚のカードが入っている。両方の袋からカードを１枚ずつ取り出し，Ａの袋から取り出したカードに書かれた数字を十の位，Ｂの袋から取り出したカードに書かれた数字を一の位として２けたの整数をつくるとき，この整数が偶数である確率を求めよ。ただし，どのカードをひくことも同様に確からしいものとする。

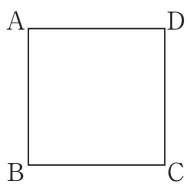
数と式 (3)　大小２つの整数があり，それらの和は341，差は207である。このとき，これら２つの整数をそれぞれ求めよ。

確率 (4)　下の図の四角形ABCDは正方形である。２点P，Qは，次の規則に従って，正方形ABCDの頂点を移動する。このとき，２点P，Qが同じ頂点上にある確率を求めよ。

規則

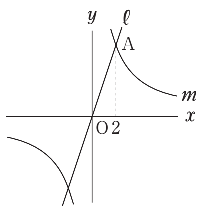
・大小２つのさいころを同時に投げる。

・点Ｐは，正方形ABCDの頂点Ａを出発し，大きいさいころの出た目の数だけ，時計回りに正方形ABCDの頂点を移動して止まる。例えば，大きいさいころの出た目の数が５のとき，点Ｐは，ＡからD，C，B，A，Dと移動し，Dで止まる。



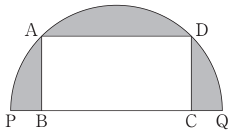
・点Qは，正方形ABCDの頂点Ａを出発し，小さいさいころの出た目の数だけ，反時計回りに正方形ABCDの頂点を移動して止まる。例えば，小さいさいころの出た目の数が５のとき，点Ｑは，ＡからB，C，D，A，Bと移動し，Ｂで止まる。

数と式 (5)　nを自然数とするとき，$\sqrt{\dfrac{72}{n}}$が自然数となるnの個数を求めよ。



関数 (6)　右の図で，ℓは関数$y=3x$のグラフ，mは関数$y=\dfrac{a}{x}$のグラフである。ℓとmの交点Ａのx座標が２であるとき，aの値を求めよ。

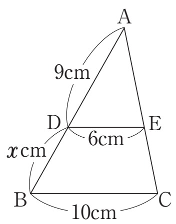
平面図形 (7)　右の図のように，PQを直径とする半円の中に長方形ABCDがある。頂点A，Dは半円の周上にあり，頂点B，Cは線分PQ上にある。PQ＝20cm，AB：AD＝1：2のとき，かげをつけた部分の面積を求めよ。ただし，円周率はπとする。



確率 (8)　大小２つのさいころを同時に投げて，大きいさいころの出た目の数をa，小さいさいころの出た目の数をbとするとき，次の①，②に答えよ。ただし，さいころのどの目の数が出ることも同様に確からしいものとする。

①　$\sqrt{ab}$が２より大きく，５より小さい確率を求めよ。

②　$(a-2)(b-4)$が正の整数となる確率を求めよ。



平面図形 (9)　右の図で，BC∥DEのとき，xの値を求めよ。

空間図形 (10)　半径が６cmの半球の表面積を求めよ。ただし，円周率はπとする。

1　計算の順序や符号に注意する。

(1)　$(-6)^2 \div 4=36 \div 4$

(2)　$(a^2b)^2=a^2b \times a^2b$

(3)　$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}=\sqrt{2}$

(4)　通分する。分母をはらってはいけない。

(5)　$y=ax^2$に，$x=-\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{9}{16}$を代入してaを求め，その値と$x=-4$，$y=b$を$y=ax^2$に代入する。

2　(1)　Bを通り，直線ℓ，mと平行な直線をひいて考える。

(2)　できるすべての整数を書きだして考える。

(3)　大きい方の整数をx，小さい方の整数をyとおく。

(4)　点P，Qがそれぞれの頂点で止まるときのさいころの出た目の数を書きだして考える。

(5)　$\sqrt{\dfrac{72}{n}}=\sqrt{6^2\times\dfrac{2}{n}}=6\sqrt{\dfrac{2}{n}}$

$\dfrac{72}{n}$が平方数となるときを考える。

(6)　点Aの座標を求め，x座標，y座標の値を$y=\dfrac{a}{x}$に代入する。

(7)　長方形ABCDを２つの正方形に分けると，それぞれの正方形の対角線の長さが10cmになる。

(8)　①　$2<\sqrt{ab}<5$より，$4<ab<25$

②　$(a-2)(b-4)$が正の整数となるのは，$a-2$，$b-4$がともに正の数の場合か，ともに負の数の場合である。

(9)　平行線と線分の比の関係より，AD：AB＝DE：BC

(10)　半径が$r$cmである球の表面積は，$4\pi r^2$cm²である。

確率　(11)　袋Aには$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{8}$のカードが, 袋Bには$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$のカードがそれぞれ１枚ずつ入っている。それぞれの袋からカードを１枚ずつ取り出し，袋Aから取り出したカードの数をa, 袋Bから取り出したカードの数をbとするとき，次の①，②に答えよ。ただし，どのカードを取り出すことも同様に確からしいものとする。

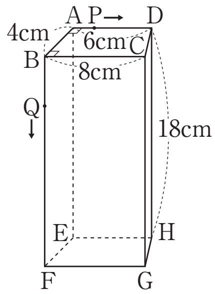
① $3a+b=10$ となる確率を求めよ。

② $(a-b)^2=4$ となる確率を求めよ。

数と式　(12)　連続する３つの自然数のうち，最も大きい数と真ん中の数の積は最も小さい数の６倍よりも56 大きい。このとき，真ん中の数を求めよ。

関数　(13)　関数$y=ax^2$について，xの変域が$-1\leqq x\leqq 3$のときのyの変域が$-3\leqq y\leqq b$であるときの，a，bの値を求めよ。

空間図形$\boxed{3}$　右の図の立体ABCD－EFGHはAB＝4cm，AD＝6cm，BC＝8cm，DH＝18cm，∠DAB＝∠ABC＝90°の四角柱である。点Pは辺AD上を頂点Aから頂点Dまで，毎秒１cmの速さで動き，点Qは辺BF上を頂点Bから頂点Fまで，毎秒３cmの速さで動く。点P，Qが頂点Aと頂点Bを同時に出発するとき，次の各問に答えよ。



(1)　点P，Qが出発してから２秒後の四角錐Q－ABCPの体積を求めよ。

(2)　四角錐Q－ABCPの体積が96cm³になるのは，点P，Qが出発してから何秒後か求めよ。

(3)　四角錐Q－ABCPと三角錐Q－EFGの体積が等しくなるのは，点P，Qが出発してから何秒後か求めよ。

空間図形$\boxed{4}$　**図１**のような，１辺の長さが６cmの立方体ABCD－EFGHがある。この立方体を，**図２**のように，３点B，D，Gを通る平面で切り，P，Qの２つの立体に分けた。

このとき，次の各問に答えよ。

図１

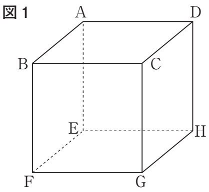
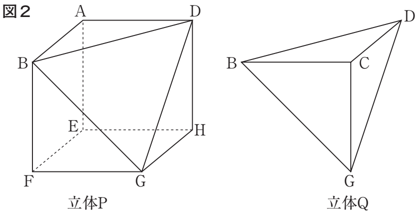


図２



(1)　**図２**の立体Pで，辺AEとねじれの位置にある辺の本数を求めよ。

(2)　**図２**の立体Pで，∠BGDの大きさを求めよ。

(3)　**図２**の立体Pの体積は，立体Qの体積の何倍か求めよ。

(4)　**図２**の立体Pの表面積から，立体Qの表面積をひいたときの差は何cm²か求めよ。

空間図形$\boxed{5}$　右の**図１**のような直方体ABCD－EFGHがある。面ABCDはAB＝AD＝12cmの正方形であり，AE＝６cmである。正方形ABCDの辺AB，辺BC，辺CD，辺DAの中点をそれぞれP，Q，R，Sとし，３点P，S，Eを通る平面でこの直方体を切断し，頂点Aを含む三角すいを取り除く。同じように，３点P，Q，F，３点Q，R，G，３点R，S，Hを通る平面で直方体を切断し，頂点B，C，Dを含む三角すいをそれぞれ取り除く。このようにして作った立体が，**図２**の立体PQRS－EFGHである。

このとき，次の各問に答えよ。

図１

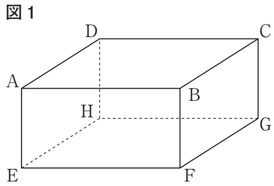
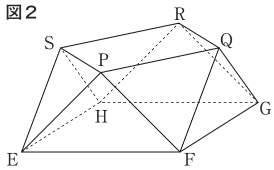


図２



(1)　**図２**の面PQRSの面積を求めよ。

(2)　**図２**の立体PQRS－EFGHには頂点が８個ある。次の文は，この頂点の個数の求め方を示したものである。この文中の$\boxed{}$にあてはまる数をそれぞれ求めよ。ただし，文中の同じ記号で表された$\boxed{}$には，同じ数が入る。

> 立体PQRS－EFGHは，$\boxed{ア}$個の三角形と$\boxed{イ}$個の四角形でできている。それらの三角形や四角形の頂点の個数の合計は$\boxed{ウ}$個であるが，立体PQRS－EFGHの各頂点には，三角形と四角形が合わせて$\boxed{エ}$個集まっている。
>
> よって，立体PQRS－EFGHの頂点の個数は，$\boxed{ウ}\div\boxed{エ}=8$(個)である。

(3)　立体PQRS－EFGHの体積を求めよ。

(11)①　$3a+b=10$となるのは，$(a, b)=(1, 7)$，$(2, 4)$

②　$(a-b)^2=4$となるのは，$a-b$の値が２または-2のときである。

(12)　連続する３つの自然数は，$n-1$, n，$n+1$と表される。

(13)　xの変域が$-1\leqq x\leqq 3$なので，aが正のとき，最小値は0，aが負のとき，最大値は０になる。

$\boxed{3}$　(1)　P，Qが出発してから２秒後の四角形ABCPの面積は，

$\frac{1}{2}\times(2+8)\times 4=20(\mathrm{cm}^2)$

(2)　x秒後には，AP＝$x$cm，BQ＝$3x$cmである。

(3)　x秒後のQFの長さは，

$(18-3x)$cm

$\boxed{4}$　(2)　BD，BG，DGはすべて正方形の対角線なので，BD＝BG＝DG

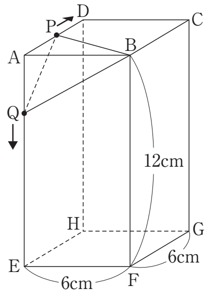
(3)　立体Qの体積は，立方体ABCD－EFGHを平面BFHDで２つに分けた立体BCD－FGHの体積の$\frac{1}{3}$

(4)　△BGDは共通で，立体Qの他の３つの面は，立体Pの△ABD，△BFG，△DGHと合同である。

$\boxed{5}$　(1)　面PQRSは正方形であり，正方形ABCDの面積の半分になる。

(3)　直方体ABCD－EFGHの体積から，取り除いた４つの合同な三角すいの体積をひく。取り除いた１つの三角すいは，底面が等しい辺の長さが６cmの直角二等辺三角形で，高さが６cmである。

空間図形 6　右の図の立体ABCD－EFGHは，底面の四角形EFGHが１辺６cmの正方形で，高さが12cmの四角柱である。点Ｐは頂点Ａを出発し，毎秒１cmの速さで辺AD，DC上をＡ→Ｄ→Ｃと移動する点であり，点Ｑは頂点Ａを出発し，毎秒１cmの速さで辺AE上をＡからＥまで移動する点である。点Ｐ，Ｑは，それぞれ頂点Ｃ，Ｅに到着すると同時に止まるものとする。



このとき，次の各問に答えよ。

(1)　２点Ｐ，Ｑが同時に頂点Ａを出発してから４秒後の三角錐P－AQBの体積を求めよ。

(2)　２点Ｐ，Ｑが同時に頂点Ａを出発してからx秒後の三角錐P－AQBの体積を$y$cm^{3}とする。$0 \leqq x \leqq 6$のとき，yをxの式で表せ。

(3)　三角錐P－AQBの体積が45cm^{3}となるのは，２点Ｐ，Ｑが同時に頂点Ａを出発してから何秒後か求めよ。

7　次の各問に答えよ。

確率　(1)　１から６までの目のある，大小２つのさいころを同時に投げるとき，出る目の数の和が10の約数になるのは，何通りあるか。

関数　(2)　yはxの２乗に比例し比例定数は-1である。xの値が-2のときのyの値を求めよ。

方程式　(3)　ある人が，自動車でA市からB市を通りC市まで行くのに，AB間は平均時速80kmで，BC間は平均時速40kmで走った。AC間の道のりは210kmであり，かかった時間は３時間であった。このとき，AB間の道のりを求めよ。

方程式　(4)　8%の食塩水が300gある。これに3%の食塩水を加えて，7%の食塩水にするには何g加えればよいか。

数と式　(5)　$2(5x-3)-(2-x)(x+3)$を，因数分解せよ。

方程式　(6)　A, B ２種類のかんづめがある。A ２個とB １個を合わせた重さは420g, A ３個とB ４個を合わせた重さは930gであった。A，B １個の重さをそれぞれ求めよ。

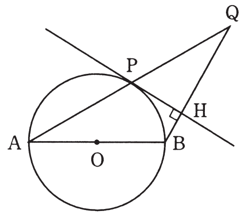
数と式 8　a，bが１以上９以下の整数であるとき，次の問に答えよ。

(1)　２次方程式$x^2-ax+b=0$の解の１つが３であるとき，a，bの組(a, b)をすべて求めよ。

(2)　$a^2=b^2+24$となるa，bの組(a, b)をすべて求めよ。

(3)　数a，bを勝手に選んで，２桁の数$10a+b$を作るとき，その数が，４か５の倍数になる確率を求めよ。

平面図形 9　右の図のように，直径ABが10cmの円Oの周上の点Pを通る接線に，垂線BHをひく。また，直線AP，BHの交点をQとする。次の(1)～(3)に答えなさい。



(1)　∠BAP＝30°のとき，∠BQPの大きさを求めよ。

(2)　点Pが，円Oの周上を点Bから点Aまで動くとき，△ABQの面積が最も大きくなるときの面積を求めよ。

関数 10　右の図１のように，２つの関数

$y=\frac{1}{2}x^2$……①，$y=x+4$……②

のグラフがあり，①と②のグラフの交点をA，Bとする。

このとき，次の各問に答えよ。

(1)　２点A，Bの座標を求めよ。

(2)　右の図２のように，x軸上に長さ５の線分CDがある。また，点C，点Dをそれぞれ通って，y軸に平行な直線をひき，①のグラフとの交点をそれぞれP，Qとする。直線PQが直線ABに平行になるとき，点Cのx座標を求めよ。

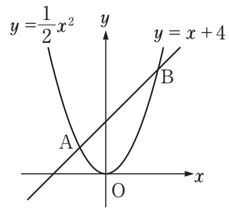


図１

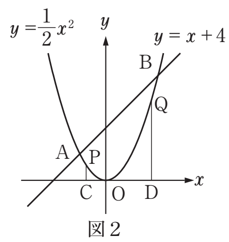


図２

6　(1)　AP＝AQ＝4cm

(2)　AP＝AQ＝$x$cmだから，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times x\times x$

(3)　点P，Qが出発してx秒後に三角錐P－AQBの体積が45cm^{3}になるとすると，(2)より，$x=6$のとき$y=36$だから，$6<x\leqq12$である。このとき，△AQB＝$\frac{1}{2}\times x\times6=3x$(cm^2)また，Pは辺DC上にあり，このとき，三角すいP－AQBの高さは常に６cmなので，$\frac{1}{3}\times3x\times6=45$

7　(1)　出る目の数の和が2，5，10になるときで，10になるのは(4, 6)，(5, 5)，(6，4)の３通りである。

(2)　$y=-x^2$に$x=-2$を代入してyを求める。

(3)　AB間の道のりを$x$kmとすると，AB間は$\frac{x}{80}$時間，BC間は$\frac{210-x}{40}$時間かかる。

(4)　食塩水中の食塩の重さの関係を式で表す。xg加えるとすると，$300\times\frac{8}{100}+x\times\frac{3}{100}=(300+x)\times\frac{7}{100}$

(5)　かっこをはずして整理すると，与式＝$x^2+11x-12$

(6)　A，B １個の重さをそれぞれxg，ygとすると，$2x+y=400$，$3x+4y=930$

8　(1)　$x=3$を代入して$a=\frac{b+9}{3}$とすると，$b+9$が３の倍数になるのは，$b=3$，6，9のときである。

(2)　$(a+b)(a-b)=24$だから，12×2，8×3，6×4よりa，bを求める。

(3)　２桁の数は，11～99の１の位が０でない81個。４の倍数は，1～99の$99\div4$の商(個)から，1～10の２個と20，40，60，80の４個とを除いた数だけである。５の倍数は，１の位の数が５である９個。

9　PとOを結ぶと，OP//BQより，QB＝2PO

(1)　∠BQP＝∠OPA

(2)　QB＝2POだから，∠QBA＝90°のとき最大。

10　(1)　$\frac{1}{2}x^2=x+4$の解が，２点A，Bのx座標

(2)　点Cの座標を$(n, 0)$とするとD$(n+5, 0)$だから，直線PQの傾きは，$\dfrac{\frac{1}{2}(n+5)^2-\frac{1}{2}n^2}{5}$で，直線ABの傾き１に等しい。

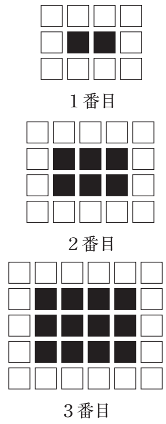
数と式 11　白い正方形のタイルと黒い正方形のタイルがたくさんあり，すべて同じ大きさである。これらのタイルを右の図のように並べ，１番目，２番目，３番目，…と図形を作っていく。

このとき，次の各問に答えよ。

(1)　５番目の図形の白いタイルの枚数を求めよ。

(2)　n番目の図形の白いタイルの枚数をnを用いて表せ。

(3)　黒いタイルが白いタイルより124枚多くなるのは何番目の図形か。



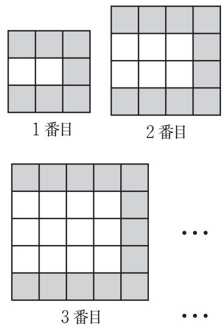
数と式 12　右の図のように，黒と白の正方形を並べて，１番目，２番目，３番目，…のように図形を作っていく。

このとき，次の各問に答えよ。

(1)　６番目の図形における白い正方形の枚数を求めよ。

(2)　n番目の図形における白い正方形の枚数をnを用いて表せ。

(3)　n番目の図形における黒い正方形が79枚のとき，白い正方形の枚数を求めよ。

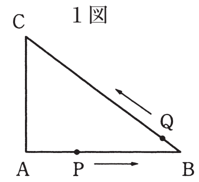


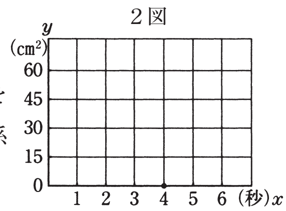
関数 13　１図は，AB＝20cm，BC＝25cm，AC＝15cmの直角三角形ABCである。点PはAを，点QはBを同時に出発し，それぞれ三角形の辺上を動く。点Pは毎秒10cmの速さでBを通りCの方向へ，また，点Qは毎秒５cmの速さでCを通りAの方向へ進む。PがQに最初に追いつくまで進むものとして，次のそれぞれの問に答えよ。

(1)　点Pは出発してから３秒後に，どの辺上にあるか。

(2)　(1)のとき，△APQの面積を求めよ。

(3)　出発してからx秒後の△APQの面積を$y$cm²とするとき，yをxの式で表し，xの変域も書け。また，そのときのxとyの関係を表すグラフを２図にかけ。



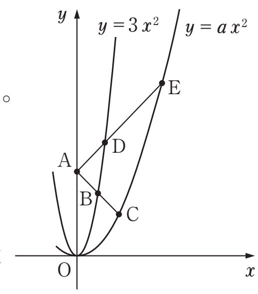


関数 14　図のように，２つの関数$y=3x^2$……①，$y=ax^2$……②のグラフと点A(0，4)がある。点Aを通る２つの直線と①，②のグラフとの交点を図のようにB，C，D，Eとすると，B(1，3)，AB＝BCである。このとき，次の各問に答えよ。ただし，点Dと点Eのx座標はともに正の値とする。

(1)　aの値を求めよ。

(2)　点Dのx座標が２であるとき，直線ADの方程式と点Eのx座標の値を求めよ。

(3)　△CADと△CDEの面積の比が１：２であるとき，点Dの座標を求めよ。



関数 15　右の図のように，関数$y=\frac{1}{4}x^2$のグラフ上に３点A，B，Cがある。点BとCのx座標はそれぞれ－2，4であり，直線ACはx軸に平行である。また，点Dはx軸上の点である。

このとき，次の各問に答えよ。

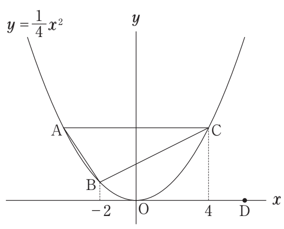
(1)　点Cの座標を求めよ。

(2)　直線ABの式を求めよ。

(3)　△ABC＝△ABDであるとき，次の①，②の場合について，点Dのx座標をそれぞれ求めよ。

①　点Dのx座標が正であるとき

②　点Dのx座標が負であるとき



11　(2)　n番目の図形の白いタイルは，縦$(n+2)$枚，横$(n+3)$枚

(3)　n番目の図形の黒いタイルは，縦n枚，横$(n+1)$枚なので，全部で$n(n+1)$枚。よって，$n(n+1)=4n+6+124$

12　(2)　n番目の図形の白い正方形は，縦n枚，横$(n+1)$枚

(3)　n番目の図形の白と黒の正方形の枚数の合計は，$(n+2)^2$枚。よって，黒い正方形の枚数について，$(n+2)^2-n(n+1)=79$が成り立つ。

13　(1)　点Pは30cm動く。

(2)　点Qは15cm動くから辺BC上にあり，△APQ＝△QAB－△PAB，点Qから辺ABへの垂線の長さをQQ′とすると，QQ′：CA＝BQ：BC

(3)　点Pは，$0\leqq x\leqq 2$のとき辺AB上にあり，底辺AP＝$10x$cm，高さを$h$cmとすると，$h:15=5x:25$

また，４秒後に辺BC上で点Qに追いつくから，$2<x\leqq 4$のとき△APQ＝△QAB－△PABで，点PからABへの垂線の長さを$a$cmとすると，

$a:15=(10x-20):25$

14　(1)　AB＝BCだから，

C$(1+1,\ 3-(4-3))$

(2)　ADは，点D$(2,\ 3\times 2^2)$を通る切片４の直線。点Eのx座標は$\frac{1}{2}x^2=4x+4$の解の，正の数

(3)　AD：DE＝1：2で，点Dのx座標をmとするとD，Eのy座標は$3m^2$，$\frac{9}{2}m^2$となるから，

$(3m^2-4):(\frac{9}{2}m^2-4)=1:3$で，

$m>0$

15　(3)①　点Dのx座標が正のとき，△ABCと△ABDはABが共通だから，CD//ABとなればよい。(2)より，ABの傾きは$-\frac{3}{2}$なので，直線CDの式を$y=-\frac{3}{2}x+b$とおいて，$x=4$，$y=4$を代入すると，

$4=-\frac{3}{2}\times 4+b$，$b=10$

②　Aを通りy軸に平行な直線を対称の軸として，点Cを対称移動させた点をC′$(-12,\ 4)$とする。AC＝AC′より，△ABC＝△ABC′

点Dのx座標が負のとき，△ABC′と△ABDはABが共通だから，C′D//ABとなればよい。